EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

34e JAARGANG 1958/59
VII - 1 APRIL 1959

INHOUD:

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (*f* 8,00 per jaar, aan het begin van het verenigingsjaar (1 september t.e.m. 31 augustus) te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaats gehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan H. W. Lenstra te Groningen.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

OVER HET GEBRUIK VAN „OF" EN „EN" BIJ HET OPLOSSEN VAN ONGELIJKHEDEN

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

In antwoordenboekjes vindt men als oplossing van de ongelijkheid

$$x^2 - 5x + 4 > 0$$

soms

$$x < 1 \quad \text{of} \quad x > 4$$

en soms

$$x < 1 \quad \text{en} \quad x > 4.$$

Over de kwestie, aan welke van deze twee schrijfwijzen de voorkeur gegeven moet worden, heerst geen eenstemmigheid onder de wiskundeleraren.

Om te proberen dit probleem tot klaarheid te brengen, zou ik liever met een eenvoudiger voorbeeld beginnen: het oplossen van een vergelijking, die één eindig aantal wortels heeft. Hiervoor kies ik

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Het oplossen van een vergelijking geschiedt door deze te vervangen door ermee gelijkwaardige vergelijkingen, totdat men de wortels gevonden heeft. In ons geval krijgen we dan

$$(x - 1)\ (x - 4) = 0,$$
$$x - 1 = 0 \quad \text{of} \quad x - 4 = 0,$$
$$x = 1 \quad \textit{of} \quad x = 4.$$

Dit laatste is nog steeds gelijkwaardig met de gegeven vergelijking. Welke de wortels zijn, blijkt er onmiddellijk uit. Men zou dus de laatste regel als het antwoord op de vraag kunnen beschouwen. Dit is echter in strijd met het gebruik. Men is gewoon als antwoord een enumeratie van de wortels te geven. Uiteraard kan men deze enumeratie niet geven in de vorm:

$$x = 1 \quad \text{en} \quad x = 4.$$

Zou men dit zonder verdere overgang als antwoord opschrijven, dan zou het lijken, dat men bedoelde, dat

$$(x - 1)\ (x - 4) = 0$$

gelijkwaardig is met

$$x = 1 \quad \text{en} \quad x = 4,$$

en dit is beslist niet juist. Men moet daarom overgaan tot een andere notatie om zijn bedoeling ondubbelzinnig weer te geven. Men zegt, dat de wortels zijn

$$x_1 = 1 \quad en \quad x_2 = 4,$$

waarbij het niet essentieel is, of men de term „en" gebruikt of deze vervangt door een komma. Beide hebben namelijk dezelfde betekenis.

Conclusie. Geeft men het antwoord als een uitspraak, die gelijkwaardig is met de oorspronkelijke vergelijking, dan moet men „of" gebruiken. Geeft men als antwoord een enumeratie van de wortels, dan moet men „en" gebruiken, maar is men tegelijkertijd verplicht een aparte notatie voor de wortels in te voeren en dus niet meer „x" te schrijven, doch „x_1", „x_2", enz. Dit laatste is conform het gebruik.

We gaan nu over tot het oplossen van de ongelijkheid

$$x^2 - 5x + 4 > 0.$$

Ook nu weer lossen we de ongelijkheid op door hem telkens door een ermee gelijkwaardige uitspraak te vervangen. We kunnen dit als volgt doen:

$$(x - 1)\ (x - 4) > 0,$$

$$x - 1 < 0 \ \text{en} \ x - 4 < 0 \quad \text{of} \quad x - 1 > 0 \ \text{en} \ x - 4 > 0$$

$$x < 1 \ \text{en} \ x < 4 \quad \text{of} \quad x > 1 \ \text{en} \ x > 4,$$

$$x < 1 \quad \text{of} \quad x > 4.$$

Het gaat nu om de term „of". Om het gebruik hiervan te waarderen, moeten we ons precies afvragen, welke vraag gesteld is en welk antwoord op deze vraag gegeven is.

Met het opgeven van de ongelijkheid hebben we een vraag gesteld, namelijk: voor welke waarden van x geldt

$$x^2 - 5x + 4 > 0?$$

Het antwoord op deze vraag kan men op talrijke manieren geven. Triviaal is b.v. het antwoord, dat dit geldt voor alle waarden van x, waarvoor $(x - 1)\ (x - 4) > 0$ is, en nog trivialer het antwoord, dat het geldt voor alle waarden van x, waarvoor $x^2 - 5x + 4 > 0$ is. Een dergelijk triviaal antwoord verlangen we natuurlijk niet; we moeten dus een afspraak maken, in welke vorm we het antwoord wensen te geven. Het lijkt mij niet gemakkelijk een algemeen bruikbare afspraak te formuleren, maar binnen het

kader van de schoolalgebra is de situatie gelukkig eenvoudig genoeg om tot een bevredigende oplossing te komen. De ongelijkheden uit de schoolalgebra hebben namelijk het kenmerk, dat er gebieden van de vorm

$$x < a, \quad a < x < b \quad \text{of} \quad x > a$$

aan voldoen plus nog eventueel geïsoleerde waarden van x. De gebieden mogen open of gesloten zijn, zodat we in het bovenstaande de tekens $<$ en $>$ door $\leqq$ resp. $\geqq$ mogen vervangen. We stellen daarom als eis, dat het antwoord zo gegeven wordt, dat deze gebieden erin expliciet aangegeven worden.

In ons voorbeeld bleek de oorspronkelijke ongelijkheid gelijkwaardig te zijn met

$$x < 1 \quad \text{of} \quad x > 4.$$

Zullen we nu het antwoord in deze vorm, dus geformuleerd met „of", laten staan, of zullen we, evenals bij de vergelijkingen een gewijzigde formulering door middel van „en" geven, waarin de gebieden geënumereerd worden?

Met het antwoord wordt bedoeld, dat de waarden, die aan $x^2 - 5x + 4 > 0$ voldoen, dezelfde zijn als de waarden, waarvoor geldt $x < 1$ of $x > 4$. In elk geval is het toelaatbaar het antwoord in deze vorm te laten staan. Het is juist en geeft een opsomming van de gebieden, die voldoen. Een dergelijke opsomming wordt immers door de term „of" verkregen.

Het doet een ogenblik vreemd aan, dat een opsomming door de term „of" teweeggebracht kan worden, echter ten onrechte. Als een handelsreiziger nog niet weet, waar hij de volgende dag heen zal gaan, maar twijfelt tussen Leeuwarden, Groningen en Assen, dan zal hij zeggen, dat hij de volgende middag in Leeuwarden *of* in Groningen *of* in Assen zal zijn. De enumeratie van de mogelijkheden, die zich voordoen, wordt in de taal en ook in de logica door „of" weergegeven [1]).

Men kan echter ook de term „en" gebruiken. De handelsreiziger kan b.v. zeggen, dat de plaatsen, waar hij misschien morgen komt, Leeuwarden, Groningen *en* Assen zijn, of, iets natuurlijker, dat hij morgenmiddag misschien in Leeuwarden is, misschien in Groningen

---

[1]) x is element van de vereniging van V_1 en V_2 schrijven we namelijk

x is element van V_1 *of* x is element van V_2

en x is element van de doorsnede van V_1 en V_2

x is element van V_1 *en* x is element van V_2.

We gebruiken dus „of" in die gevallen, waarin de gebieden opgesomd worden, waartoe x kan behoren, en „en" voor het vormen van de doorsnede van gebieden.

en misschien in Assen. De wiskundige kan zich op soortgelijke wijze van de term „en" bedienen. In ons voorbeeld kan hij zeggen, dat de waarden van x, die aan de ongelijkheid voldoen, zijn

alle waarden, waarvoor $x < 1$
en alle waarden, waarvoor $x > 4$.

Men zou kunnen afspreken, dat men dan kortweg zegt: de gebieden, die aan de ongelijkheid voldoen, zijn

het gebied $x < 1$ en het gebied $x > 4$.

Tegen het uitspreken van het antwoord in deze vorm kan niemand bezwaar maken. De moeilijkheden komen echter, zodra men tot een corresponderende notatie wil overgaan. Zowel de voorstanders van „of" als die van „en" zullen moeten beginnen met op te merken, dat

$$x^2 - 5x + 4 > 0$$

gelijkwaardig is met

$$x < 1 \quad \text{of} \quad x > 4.$$

De voorstanders van „of" zijn nu tevreden en achten dit meteen het gevraagde antwoord. De voorstanders van „en" zijn echter van mening, dat hierna pas het antwoord op de gestelde vraag gegeven moet worden. Zij moeten hiervoor de een of andere vorm vinden. Een mogelijkheid is de bovengenoemde:

de gebieden, die voldoen, zijn de gebieden $x < 1$ en $x > 4$.

Men zou dan echter toch graag tot een kortere formulering komen, waarin geen natuurlijke (niet-symbolische) taal meer voorkomt. Maar men kan, evenmin als bij de vergelijkingen, de in natuurlijke taal geformuleerde passages eenvoudig weglaten en als antwoord opgeven: $x < 1$ en $x > 4$. Men zou iets dergelijks alleen kunnen doen, als men, analoog aan de notatie x_1, x_2, enz. bij de vergelijkingen, ook hier in het antwoord op een andere notatie overging. Hoewel dit stellig mogelijk is en ook wel gedaan wordt, lijkt het mij een nodeloze complicatie.

De beste oplossing lijkt mij dus te schrijven

$$x < 1 \quad \textit{of} \quad x > 4,$$

waarbij men bij mondelinge toelichting of weergave van het antwoord van alle hulpmiddelen gebruik kan maken, die de natuurlijke taal biedt. Men kan dus gerust zeggen: „de gebieden $x < 1$ *en* $x > 4$ voldoen" of „x kan kleiner dan 1 *en* ook groter dan 4 zijn". Bij het spreken beschikt men over de natuurlijke taal; bij het schrijven vermijdt men deze in de wiskunde echter zoveel mogelijk, zodat in de notatie van het antwoord „of" de voorkeur verdient boven „en".

Ter nadere toelichting nog het volgende voorbeeld. Los op

$$x(x-1)(x-6)>0.$$

We vinden, dat dit gelijkwaardig is met

$$x>0 \text{ en } x<1 \quad \text{of} \quad x>6.$$

Formuleren we dit antwoord door de gebieden te enumereren, dan krijgen we: aan de ongelijkheid voldoen die getallen, waarvoor $x>0$ *en* $x<1$ *en* die getallen, waarvoor $x>6$. In deze formulering komt tweemaal de term „en" voor. De beide termen „en" hebben echter een geheel verschillende betekenis. Het eerste „en" duidt aan, dat we de *doorsnede* moeten vormen van de gebieden $x>0$ en $x<1$, terwijl het tweede „en" juist betekent, dat we de *vereniging* moeten vormen van de gebieden $0<x<1$ en $x>6$. Een juist begrip voor de betekenis van de termen „of" en „en" wordt op deze wijze op zijn zachtst uitgedrukt niet in de hand gewerkt. Men zal mij tegenwerpen, dat we dan ook niet $x>0$ en $x<1$ schrijven, maar $0<x<1$. Dit neemt niet weg, dat de schrijfwijze $0<x<1$ slechts camouflage is voor $x>0$ en $x<1$.

Ten slotte nog een voorbeeld, waarin toegestaan wordt in het antwoord ook het symbool $\neq$ te gebruiken. Los op

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{2x-1}{x(x-1)}.$$

We vermenigvuldigen beide leden met $x(x-1)$ en moeten er daarbij aan denken, dat hierdoor wortels ingevoerd kunnen worden. De vergelijking is dus gelijkwaardig met

$$x-1+x=2x-1 \quad \text{en} \quad x\neq 0 \quad \text{en} \quad x\neq 1.$$

Hierin is $x-1+x=2x-1$ een identieke vergelijking. Het voorgaande is dus gelijkwaardig met

$$x\neq 0 \quad \text{en} \quad x\neq 1.$$

Ik weet, dat vele collega's het antwoord niet in deze vorm willen geven. Toch is het kort en correct en sluit het zelfs direct aan bij het antwoord in niet formele vorm: aan de vergelijking voldoen alle getallen, die niet gelijk aan 0 en ook niet gelijk aan 1 zijn.

Degenen, die gebieden willen enumereren, moeten het antwoord in deze vorm uit den boze vinden. Het antwoord wordt namelijk gegeven als een doorsnede van twee gebieden, namelijk van de gebieden $x\neq 0$ en $x\neq 1$. Zij zijn verplicht juist een vereniging van gebieden op te geven en moeten dus schrijven: de gebieden, die voldoen, zijn $x<0$, $0<x<1$ en $x>1$.

Ter versteviging van mijn opvatting, zou ik het probleem nog iets

algemener willen stellen. Het oplossen van een algebravraagstuk, van welke aard ook, is in de schoolwiskunde veelal het verkrijgen van een antwoord, dat gelijkwaardig met de opgave is. Dit geldt niet alleen voor het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden, maar ook van vraagstukken, die leiden tot een stel vergelijkingen of ongelijkheden, dat gelijkwaardig met de opgave is (zoals vraagstukken over reeksen, het bepalen van parameters). In deze vraagstukken zal het gegeven blijken gelijkwaardig te zijn met een stel voorwaarden, waaraan tegelijk voldaan moet zijn en die dus door „en" verbonden moeten worden, of die juist een keuze toelaten en dus door „of" verbonden moeten worden. Zo is

$(7 - a)x^2 + 6x + a + 3$ heeft twee nulwaarden en een minimum

gelijkwaardig met

$$7 - a > 0 \quad \text{en} \quad (a + 2)(a - 6) > 0,$$

dus met

$$a < 7 \quad \text{en} \quad a < -2 \text{ of } a > 6.$$

Ten slotte is dit resultaat gelijkwaardig met

$$a < -2 \quad \text{of} \quad 6 < a < 7.$$

Het op de juiste wijze hanteren van de termen „of" en „en" is vaak vrij moeilijk. Voor het ontwikkelen van een goed denkvermogen — en dat is toch een van de belangrijkste opgaven voor ons wiskunde-onderwijs — is het van belang, dat de leerling dergelijke onderscheidingen leert maken en doorzien. Een belangrijk hulpmiddel kan daarbij zijn het afbeelden van de intervallen op de getallenrechte.

Natuurlijk is het mogelijk om nu ook nog het antwoord te formuleren in de vorm van een enumeratie van intervallen. De bezwaren, die ik hiertegen heb, zou ik alsvolgt willen samenvatten:

1e. de enumeratie wordt in wezen reeds bewerkstelligd door het gebruik van „of",

2e. als men toch nog een opsomming van intervallen wil geven, moet men het zo juist gebruikte „of" door „en" vervangen, hetgeen in *schriftelijke* tekst de leerling het onderscheid tussen „of" en „en" minder duidelijk kan doen worden,

3e. er is een aparte notatie nodig om de antwoorden symbolisch weer te geven (analoog aan de notatie x_1, x_2, enz. voor de wortels van een vergelijking) of een formulering in natuurlijke taal (de intervallen, die voldoen, zijn de intervallen $a < -2$ en $6 < a < 7$),

4e. hoe minder verscheidenheid van notaties voorkomt, des te gemakkelijker wordt het onderwijs door de leerling gevolgd.

Als voordelen van de enumeratie zou ik kunnen aanvoeren, dat deze directer aansluit bij het alledaagse denken, hetgeen men als een didactisch voordeel zou kunnen aanvoeren, en dat men door de intervallen te enumereren een betere analogie verkrijgt tussen het oplossen van vergelijkingen en van ongelijkheden. Deze voordelen wegen voor mij niet tegen de nadelen op, maar dit is uiteraard een subjectieve kwestie.

Naschrift van dr. Wansink.

Inderdaad blijft dit een subjectieve kwestie ten opzichte waarvan ik, ook na de scherpe analyse van dr. Vredenduin, een van het zijne afwijkend standpunt blijf innemen.

Duidelijkheidshalve geef ik hieronder aan, welke formuleringen voor het antwoord ik prefereer.

Ik ben er voorstander van de vraag, welke de wortels zijn van de vergelijking

$$(x - 3)(x - 5)(x - 7) = 0$$

te beantwoorden met:

de wortels zijn $+3$, $+5$ en $+7$,

of met:

de wortels zijn $x_1 = +3$, $x_2 = +5$ en $x_3 = +7$.

Verder ben ik er voorstander van de vraag, welke waarden van x voldoen aan de ongelijkheidsopgave

$$(x - 3)(x - 5)(x - 7) > 0$$

te beantwoorden met:

de intervallen die voldoen zijn $(+3, +5)$ en $(+7, \rightarrow)$,

of met:

de waarden die voldoen zijn $+3 < (x)_1 < +5$ en $(x)_2 > +7$.

Ik lees dit laatste antwoord als volgt:

De waarden van x die voldoen zijn: alle waarden van x tussen $+3$ en $+5$ èn alle waarden van x groter dan $+7$.

Het *gesloten* interval $+3 \leqq x \leqq +5$ zou ik willen voorstellen door $[+3, +5]$.

Ik ben ervan overtuigd dat het tot een goed begrip van de betekenis van de woordjes „en" en „of" kan bijdragen, als een leerling, die onder herhaald gebruik van het woordje „of" een gegeven vergelijking of een gegeven ongelijkheidsopgave tot een standaardvorm herleid heeft, ertoe wordt gebracht het antwoord op de gestelde vraag te geven in een zin met het woordje „en" erin.

DE VINDING VAN FERRARI

door

Dr. C. J. VOOYS

Hoe Ferrari zelf op 23-jarige leeftijd de oplossing van een vergelijking van de 4e graad heeft behandeld, is niet bekend. Maar een uitvoerige mededeling hierover vinden we bij zijn leermeester Cardano. [1]) Deze wiskundige — bekend om de Cardaanse ophanging en om de naar hem genoemde, alzijdig scharnierende Cardan-as bij de moderne auto — vertelt in zijn Ars magna 1545, dat Ioannes Colla het vraagstuk

$$\frac{6}{1 \text{ positio}} + 1 \text{ positio} + \frac{1}{6} \text{cubi aequantur } 10$$

of

$$\frac{6}{x} + x + \frac{1}{6}x^3 = 10$$

of

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$$

niet kon oplossen, maar dat Ferrarius het heeft gevonden. De latijnse tekst, zoals Cantor [2]) die meedeelt, is niet te begrijpen; ook bij Libri [3]) laat deze veel te wensen over. Daarom is de volgende vertaling gebaseerd op het latijn van de uitgave van 1663, waaraan ook de tekening en de notatie ontleend zijn. Cardano betoogt:

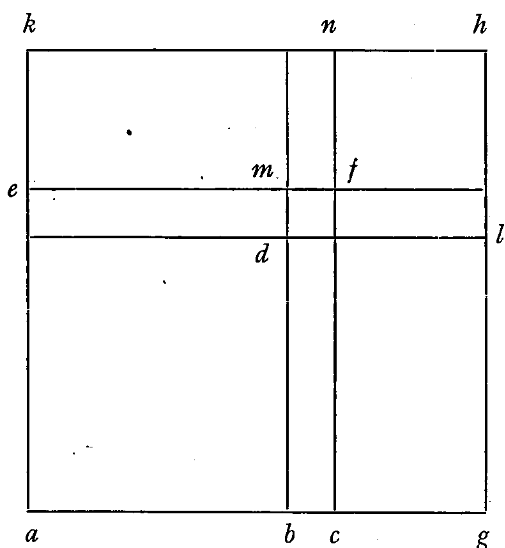
„neem een vierkant *a f*, verdeeld in 2 vierkanten *a d* en *d f*, en 2 aanvullende stukken *d c* en *d e*; wanneer men daar een gnomon *k f g* om heen wil aanbrengen zó, dat het geheel *a h* een vierkant blijft, dan zal die gnomon bestaan uit het dubbele product *g c*, een toegevoegde lijn, maal *c a*, vermeerderd met een vierkant *g c*; want *f g* bestaat uit *g c* maal *c f* volgens de omschrijving in het begin van het 2e boek van Euclides en *c f* is gelijk aan *c a* volgens de omschrijving van het vierkant; en omdat volgens 44 van het eerste boek van Euclides *k f* gelijk is aan *f g*, bestaan dus de twee vlakken *f g* en *k f* uit het dubbele product *g c* maal *c a*; en het vierkant van *g c* is gelijk aan *f h* volgens toevoegsel 4 van het 2e boek van Euclides.

[1]) Cardanus Opera omnia IV 294 1663 Lugduni.

[2]) Cantor Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 1913 II 509.

[3]) Libri Histoire des sciences mathématiques III 442.

Dus is het vraagstuk als volgt duidelijk: wanneer *a d* een vierde macht is en *c d* en *d e* elk 3 kwadraten en *d f* is gelijk 9, dan is *b a* 1 kwadraat en *b c* moet dan gelijk zijn aan 3. Omdat we nu enkele kwadraten wilden toevoegen aan *d c* en *d e* — dit waren *c l* en *k m* — zal nog het vlak *l n m* nodig zijn om het geheel tot een vierkant te maken; dit vlak bestaat 1e uit het kwadraat van *g c* (de helft van het aantal van de toegevoegde kwadraten) — want *c l* is *g c* maal *a b*, zoals reeds is aangetoond, en *a b* is 1 kwadraat, omdat we *a d* nemen als een vierde macht —; verder ontstaan *f l* en *m n* uit *g c* maal *c b*



volgens 42 van het eerste boek van Euclides; dus ontstaat het vlak *l n m* — een toe te voegen getal — uit *g c* vermenigvuldigd met het dubbele van *c b* (dus met het aantal van de kwadraten, dat 6 bedroeg), vermeerderd met *g c* maal zichzelf (is gelijk aan een toegevoegd aantal kwadraten). Hiermee heb ik de oplossing laten zien.''

sit quadratum *a f*, divisum in duo quadrata *a d* et *d f*, et duo supplementa *d c* et *d e* et velim addere gnomonem *k f g* circumcirca, ut remaneat quadratum totum *a h*; dico quod talis gnomo constabit ex duplo *g c*, additae lineae, in *c a* cum quadrato *g c*; nam *f g* constat ex *g c* in *c f* ex diffinitione data in initio secundi Elementorum et *c f* est aequalis *c a*, ex diffinitione quadrati et quia per 44 primi Elementorum *k f* est aequalis *f g*; igitur duae superficies *g f* et *f k* constant ex *g c* in duplum *c a* et quadratum *g c* est *f h* per corollarium 4 secundi Elementorum; igitur patet propositum, si igitur: *a d* sit 1. quadrati quadratum et *c d* ac *d e* 3. quadrata, et *d f* 9,

erunt *b a* 1. quadratum et *b c* 3. necessario. Cum igitur voluerimus addere quadrata aliqua ad *d c* et *d e* et fuerint *c l* et *k m*, erit ad complendum quadratum totum necessaria superficies *l n m*, quae ut demonstratum est, constat ex quadrato *g c*, numeri quadratorum dimidiati, nam *c l* est superficies ex *g c* in *a b*, ut ostensum est, et *a b* est 1. quadratum, quia ponimus *a d* 1. quadrati quadratum, *f l* vero et *m n* fiunt ex *g c* in *c b* ex 42a primi Elementorum; quare superficies *l n m*, et est numerus addendus, fit ex *g c* in duplum *c b*, id est in numerum quadratorum, qui fuit 6. et *g c* in se ipsam, id est numero quadratorum addito; et haec demonstratio nostra est.

„Zo gezien moet men steeds een kant van een vergelijking van de 4e graad herleiden tot een vierkantswortel — d.w.z. door aan beide kanten zóveel toe te voegen, dat 1 vierde macht vermeerderd met een kwadraat en een getal een vierkantswortel hebben; dit is te bereiken, wanneer men de helft van het aantal kwadraten neemt als wortel van het getal; ook moet men zorgen; dat de uiterste termen in beide leden positief zijn; anders kan de drieterm of de tweeterm, die tot een drieterm is herleid, onmogelijk een wortel hebben. Hierna moet men zóveel kwadraten en eenheden toevoegen aan één kant — volgens regula (richtlijn) 3 —, dat hetzelfde toegevoegd aan de andere kant, waar de onbekenden zijn, een drieterm vormt met vierkantswortel door de toevoeging; dan heeft men het aantal kwadraten en eenheden, dat aan beide kanten moet worden toegevoegd; vervolgens moet men aan beide zijden de vierkantswortel trekken; die wordt aan de ene kant: 1 kwadraat plus een getal (of min een getal); aan de andere kant: 1 of meer onbekenden plus een getal of min een getal of ook een getal min een aantal onbekenden; dan heeft men de oplossing van het vraagstuk, op grond van passage 5 van dit werk."

Hoc peracto semper reduces partem quadrati quadrati ad R id est addendo tantum utrique parti, ut 1 quadrati quadratum cum quadrato et numero habeant radicem; hoc facile est cum posueris dimidium numeri quadratorum radicem numeri; item facies, ut denominationes extremae sint plus in ambabus aequationibus, nam secus trinomium seu binomium reductum ad trinomium necessario careret radice. Quibus iam peractis addes tantum de quadratis et numero uni parti per tertiam regulam, ut idem additum alteri parti, in qua erunt res, faciant trinomium habens R quadratam per positionem, et habebis numerum quadratorum et numeri addendi utrique parti; quo habito ab utroque extrahes R quadratam quae erit in una 1 quadratum plus numero (vel minus numero), ex alia 1 positio vel plures plus numero vel minus numero, vel

numerus minus positionibus; quare per quintum capitulum huius habes propositum.

Hiermede heeft de schrijver het vraagstuk teruggebracht tot een vierkantsvergelijking; maar men vraagt zich af, waarom het trekken van de derde-machtswortel, die hierbij toch aan de orde komt, is overgeslagen. Dit wordt duidelijk uit wat Cardano verder meedeelt. Hij geeft de toepassing van zijn methode op de vergelijking

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x.$$

Door die bewerking krijgt deze vergelijking bij hem de volgende gedaante

$$x^4 + 12x^2 + 36 = 6x^2 + 60x$$

en ten slotte door toevoeging van een aantal kwadraten — dit kwadraten in ruimere zin genomen (zie Cardano's toelichting bij de tekening) brengt de schrijver de vergelijking in deze vorm, zoals hij zelf zijn bedoeling uitdrukt

1. quad. qd. $\bar{p}$. 2. pos. $\bar{p}$. 12. qd. R. $\bar{p}$. quad. $\bar{p}$. 12. pos. additi numeri $\bar{p}$. 36 aequalia: 2. pos. $\bar{p}$. 6. quadr. $\bar{p}$. 60. pos. $\bar{p}$. 1 quad. $\bar{p}$. 12. pos. numeri additi.

In deze terminologie schuilen de volgende moeilijkheden:

a. positio wordt gebruikt voor: onbekende; maar het is zowel de onbekende uit $60x$ als ook het onbekende aantal kwadraten, dat toegevoegd moet worden, om de vierkantswortel te kunnen trekken.
b. met kwadraten worden aangeduid zowel de oorspronkelijke als de toegevoegde.
c. kwadraat wordt in ruimere zin opgevat, zodat ook de rechthoek hieronder valt.

Men zou de volgende vertaling kunnen wagen:

1 vierde macht + 2 × een aantal toegevoegde kwadraten + 12 oorspronkelijke kwadraten + het kwadraat van het toegevoegde-aantalgetal + 12 × het toegevoegde-aantalgetal + 36

is gelijk aan

2 × een aantal toegevoegde kwadraten + 6 oorspronkelijke kwadraten + 60 onbekenden + het kwadraat van het toegevoegde-aantalgetal + 12 × het toegevoegde-aantalgetal.

Onmiddellijk hierop laat Cardano de manier volgen, waarop hij de verdere ontwikkeling denkt te kunnen volbrengen. Wij laten hem hier zelf aan het woord:

„Wanneer men verder het 1e deel van de drieterm vermenigvuldigt met het 3e deel, ontstaat het kwadraat van de helft van het

2e deel van de drieterm; nu levert de helft van het tweede deel, met zichzelf vermenigvuldigd, 900 kwadraten op; het product van het 1e en het 3e deel wordt: 2 derde machten + 30 kwadraten + 72 maal het aantal toegevoegde kwadraten, maal het oorspronkelijke kwadraat; nu zal het geen verschil maken, wanneer men door de oorspronkelijke kwadraten deelt — omdat gelijke getallen, door gelijke gedeeld, gelijk blijven —; zodat 2 derde machten + 30 kwadraten + 72 maal het aantal van de toegevoegde kwadraten gelijk zijn aan 900; of 1 derde macht + 15 kwadraten + 36 maal het aantal van de toegevoegde kwadraten is gelijk aan 450."

Hiermede eindigt de behandeling van dit probleem; het trekken van de 3e-machtswortel is achterwege gebleven; dit is niet onbegrijpelijk, want in één van de voorafgaande hoofdstukken van zijn werk heeft hij dit geval uitvoerig besproken; hij veronderstelt deze oplossing hier dus bij de lezer bekend.

Aan collega Gobel Stout mag ik voor zijn belangstelling en wenken, een woord van dank niet onthouden.

HET BEREKENEN VAN KWADRATEN

Het is algemeen gebruikelijk, in de eerste klasse na de behandeling van de merkwaardige produkten deze toe te passen op eenvoudige berekeningen als van 27×33, 104^2 enz. Voor het vlug berekenen van sommige kwadraten kan dan met voordeel de formule $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ dienen, maar dan geschreven in de vorm $a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$. Bij inspectie van de tot mijn beschikking staande algebra-leerboeken bleek mij, dat deze toepassing weinig bekend is, en hieruit put ik de moed, in deze bladvulling voor zo'n eenvoudig onderwerp de aandacht te vragen.

Voorbeelden:

$104^2 = 100 \times 108 + 4^2 = 10816.$

$81^2 = 62 \times 100 + 19^2 = 6561.$

$11\frac{1}{8}^2 = 10 \times 12\frac{1}{4} + 1\frac{1}{8}^2 = 122\frac{1}{2} + 1 \times 1\frac{1}{4} + \frac{1}{8}^2 = 123\frac{49}{64}.$

$6\frac{1}{2}^2 = 6 \times 7 + \frac{1}{2}^2 = 42\frac{1}{4}.$

Ook de formule voor $(a + b)^2$ (en natuurlijk $(a - b)^2$) komt te voorschijn: $(a + b)^2 = a(a + 2b) + b^2$ enz.

Overigens kan de aangegeven rekenwijze ook worden afgeleid door de uitkomst van $(a + b)^2$ in deze vorm $a(a + 2b) + b^2$ te schrijven.

H. W. L.

HOEKEN IN RADIALEN UITDRUKKEN, WANNEER EN HOE?

door

J. K. TIMMER

In Euclides 34-III werpt Dr. Vredenduin op pagina 75 de vraag op, of het wenselijk is, de radiaal meteen in te voeren bij de eerste kennismaking met de goniometrie. Behalve dat ik hiervoor voel, zou ik nog verder willen gaan en de vraag stellen, of het aanbeveling verdient, de natuurlijke hoekmaat te introduceren voordat de 90°-verdeling aan de orde komt.

Dit lijkt mij mogelijk, mits men uitgaat van het intuïtieve begrip, dat aan het hoekbegrip ten grondslag ligt, n.l. de verhouding:

$$\frac{\text{grootte van een object}}{\text{afstand tot het object}}$$

Het is niet moeilijk, voor de klas uit te leggen, wat men bedoelt met de uitdrukking: Ik zie de bal, die ik met gestrekte arm tussen duim en vinger houd, onder een hoek $\frac{1}{10}$. Buig ik mijn arm, dan wordt die hoek groter, b.v. $\frac{1}{5}$. Als men dan duidelijk maakt, dat de aldus geïntroduceerde hoek $\frac{1}{10}$ moeilijkheden geeft, omdat nòch het begrip „grootte van het object", nòch het begrip „afstand tot het object" vast staat (men vervange de bal door een potlood als vertegenwoordiger van een lijnstuk), dan kan de klas toegankelijk gemaakt worden voor de gedachte: Hoe kleiner de hoek, hoe minder de bezwaren tellen. De vraag: „Welke hoek is dan 1?" kan dan voorlopig beantwoord worden met: Vijf hoeken van $\frac{1}{5}$, maar beter tien hoeken van $\frac{1}{10}$, nog beter . . . De gedachte, dat men de straal van een cirkel langs de cirkel zelf moet leggen, om tot de natuurlijke hoekeenheid te geraken, kan hierbij aansluiten.

Het is mij opgevallen, dat mensen, die eenmaal met graden vertrouwd zijn, moeite hebben met de radiaal en het zou dan ook de moeite waard zijn, eens te onderzoeken, of het graadbegrip de vorming van het radiaalbegrip in de weg staat. Hoe dat onderzoek te verrichten, is natuurlijk een probleem op zichzelf, maar men zou de proef eens met een nieuwe eerste klas kunnen nemen en na verloop van enige jaren kunnen *trachten* de gevolgen na te gaan. Ik zelf kan er slechts van zeggen, dat deze manier om tot de radiaal

te komen, mij wel bevalt, maar ik heb het nooit in de eerste klas geprobeerd. Een van de gevolgen lijkt me, dat men zeer voorbarig tot: Omtrek cirkel $= 2\pi r$ zou moeten komen, maar het is best denkbaar, dat de daaraan verbonden bezwaren meevallen.

Ik kan mij collega Vredenduin's wikken en wegen voorstellen, als hij aarzelt tussen uitdrukking van het argument in duizendsten van radialen of van π radialen. Hij is m.i. terecht van de eerste methode afgestapt. Maar het is mij niet duidelijk, waarom hij daar*na* niet opnieuw aarzelt tussen duizendsten van $\frac{1}{2}\pi$ rad, van π rad. en van 2π rad. De eerste geeft een verkapte aanvaarding van de rechte hoek als eenheid, de tweede — zijn keuze — geeft die rol aan de gestrekte hoek en de derde zou de volle hoek als grondslag geven.

Nu bestaan er reeds een indeling in radialen, één in graden en één in decimale graden, uitgaande van de rechte hoek. Mijn bezwaar tegen π (en eveneens tegen 2π) is, dat de chaos in eenheden hierdoor vergroot zou kunnen worden.

Waarom de goede gedachte niet vastgeketend aan $\frac{1}{2}\pi$? Degenen die mijn „Nieuwe Schooltafel" kennen (ik maak uit de elfde regel van zijn artikel op dat collega Vredenduin deze uitgave van Thieme *niet* kent) vinden op pag. 38, 39, 42 en 43 dezelfde getallen die op pag. 76—82 aan het eind van Vredenduin's artikel staan, en dan nog twee maal zo dicht, een natuurlijk gevolg van de keuze van $\frac{1}{2}\pi$ in plaats van π.

Aan die keus is nog een ander klein didactisch voordeel verbonden. Als voorbereiding voor het vlot kennen van goniometrische verhoudingen is het m.i. noodzakelijk, dat de leerlingen de beeldpunten der hoeken op de goniometrische cirkel uiterst snel en zeker weten te vinden. Aanvankelijk sta ik ze toe, van hun horloge gebruik te maken: 0° bij de 3, 90° bij de 12, 150° bij de 10, enz. Het snel plaatsen van 330° bij de 4 en andere overgestrekte hoeken gaat nooit zo vlot. Dat is helemaal niet erg, maar met $3\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\pi$ zou iedereen met één oogopslag *wel* de 4 vinden. Om 30° te plaatsen moet men kiezen tussen $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\pi$ of $\frac{1}{6}\pi$. Weet men eenmaal rotsvast dat $\frac{1}{2}\pi$ een rechte hoek is en dat zijn beeldpunt het bovenste punt van de cirkel is, dan reageert men beslist vlotter op $\frac{1}{3}$ rechte hoek dan op $\frac{1}{6}$ gestrekte hoek. Om dit alles stel ik die kleine wijziging voor in Vredenduin's plan.

DIDACTISCHE REVUE

door

Dr. JOH. H. WANSINK

Over het functiebegrip.

Op verzoek van enige lezers wil ik uit de omvangrijke lectuur waarvoor Wimecos' leesportefeuille me stelt, een enkel onderwerp in wat grotere uitvoerigheid naar voren brengen.

In het tijdschrift „*der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht*" van onze oosterburen wordt al enige jaren lang een didaktische polemiek gevoerd, die tal van aanrakingspunten vertoont met de discussie die zich ten onzent heeft ontsponnen na de artikelen van dr. J. Koksma in de 25e jaargang van *Euclides*, en waarvoor ik enige belangstelling bij de lezers van ons tijdschrift meen te mogen veronderstellen.

In aflevering 9 van Band 8 (februari 1956) schreef G. Pickert „*Bemerkungen zum Funktionsbegriff*". Zijn opmerkingen betroffen in het bizonder de termen Funktion, Funktionsgleichung, Umkehrfunktion, Variabele, Grenzwert; zie Euclides XXXII, blz. 59. Van verschillende zijden (Goes, Siegert) kwam men tegen dit artikel in verzet.

Aan Siegert's betoog in aflevering 8 van Band 10 (januari 1958) ontleen ik:

Für Prof. Pickert ist der Begriff der Funktion identisch mit dem Begriff eindeutige Zuordnungsvorschrift. Die Definition „Funktion = Zuordnungsvorschrift" ist jedoch keineswegs, wie Pickert behauptet, die im mathematischen Sprachgebrauch übliche. Es ist richtig, dasz in der Theorie der reellen Funktionen der letzten Jahre unter einer Funktion — ohne Zusatz — stets eine eindeutige Funktion verstanden wird. In keinem mir bekannten modernen Lehrbuch der reellen Funktionstheorie wird jedoch definiert: „Eine Funktion ist eine Zuordnungsvorschrift". Dies ist nicht sehr überraschend. Es gibt stetige, integrierbare, schwankungsbeschränkte Funktionen, usw. Natürlich ist es nur eine Frage des Sprachempfindens, auch von stetigen, integrierbaren, schwankungsbeschränkten Zuordnungsvorschriften zu sprechen. Dagegen ist meines Erachtens die [folgende] Definition kaum anfechtbar:

„Ist jedem x einer Menge E eine bestimmte Zahl $f(x)$ zugeordnet, so sagen wir, dasz auf E eine Funktion $f(x)$ definiert sei.”

$x - y = 1$ ist dann eine Zuordnungsvorschrift, aber keine Funktion; durch diese Zuordnungsvorschrift wird vielmehr die Funktion $y = x - 1$ erklärt.

Nach diesen kritischen Feststellungen möchte ich es nicht unterlassen, auf die folgenden Bemerkungen von Prof. Pickert hinzuweisen, welche mir beachtenswert erscheinen:

1. Zu $y = x - 1$ ist $x = y - 1$ die Umkehrfunktion und nicht die Funktion $x = y + 1$.
2. Es ist gut, den Schülern oberer Klassen auch Funktionen wie durch die Vorschrift
$$y \leqq x < y + 1, \quad y \text{ ganzzahlig,}$$
erklärte Funktion vorzuführen.
3. Der Grenzwert für Funktionen sollte ohne Benützung von Folgen auch in der Schule erklärt werden.

Wenn wir durchaus erreichen müssen, dasz ein Schüler die Gleichung
$$x^2 + y^2 = 1$$
nicht als Funktion anspricht, so werden wir andrerseits aber wohl nicht fordern dürfen, dasz er sie als „Relation zwischen zwei Zahlen” deutet. Gewisz trifft dieser Name den rein begrifflichen Sachverhalt am besten, aber sein Gebrauch würde für den Schüler bedeuten, dasz er die geometrischen Figuren gleichsam als Darstellung von Relationen auffaszt, währens wir ihm doch umgekehrt zugestehen müssen, in der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ die Darstellung des Einheitskreises zu sehen, oder eben genauer: die Bedingung, dasz der Punkt mit den Koordinaten x und y auf dem Einheitskreis liegt.

In aflevering 5 van Band 10 (oktober 1958) geeft nu Pickert *„Einige Erläuterungen und Entgegnungen”*. Hij wijst erop dat zijn hoofdbedoeling is geweest te bepleiten dat de naam „Function nur dort verwandt werden soll, wo zu jedem Wert x des Definitionsbereich ein eindeutig bestimmter Funktionswert gegeben ist und man daher die Erlaubnis hat, von *dem* Funktionswert an der Stelle x zu sprechen”.

Niet slechts leerboeken voor de middelbare school, ook studieboeken voor de universiteit zondigen nog tegen dit principe.

Pickert beperkt zich dus principieel tot eenwaardige functies en verklaart: „Durch diese Einengung geht nichts Wichtiges verloren.

Für die Schule scheint es mir völlig ausreichend, $x^2 + y^2 = 1$ als Kreisgleichung zu bezeichnen. Es gibt dann genau zwei im Intervall von — 1 bis 1 definierte und dort stetige Funktionen, bei denen Argument x und Funktionswert y eben diese Kreisgleichung erfüllen, nämlich $y = \sqrt{(1 - x^2)}$ und $y = -\sqrt{(1 - x^2)}$. Wenn man die Verfahren der Differential- und Integralrechnung anwenden will, musz man erst von der Kreisgleichung zu einer dieser Funktionen übergehen (sofern man nicht eine Parameterdarstellung des Kreises verwendet, also ihn etwa durch $x = \cos t$, $y = \sin t$ darstellt). Einen Differentialquotienten der mehrdeutigen Funktion $x^2 + y^2 = 1$ gibt es nicht, wohl aber für $-1 < x < 1$ einen solchen von $y = \sqrt{(1-x^2)}$ und einen solchen von $y = -\sqrt{(1-x^2)}$."

Pickert heeft er ook bezwaar tegen over een „Funktionsgleichung $x^2 + y^2 = 1$" te spreken „da diese Gleichung gar nicht mehr eine einzige Funktion definiert, sondern zwei verschiedene stetige Funktionen und eine Unzahl von unstetigen."

Pickert is er niet voor van de relatie $x^2 + y^2 = 1$ te spreken; hij wil zich beperken tot de meetkundige formulering „vergelijking van de cirkel". Hij vervolgt: „Wenn der in meinem Aufsatz erwähnte Relationsbegriff in den Schulunterricht eingebaut werden konnte, würde ich das sehr begrüszen; nur halte ich es gegenüber meinem Hauptanliegen nicht für vordringlich. Übrigens dürfte der Relationsbegriff von besonderer Bedeutung für die allgemeinbildende Seite der Mathematik sein. Dieser Begriff ist für die neuere Entwicklung der Logik und für viele andere Wissenschaften sehr wichtig".

Pickert gaat ook in op de schrijfwijze $y = x^2$.

Hij vat dit op als: de functie x^2 van x die men kortheidshalve door y aanduidt. In de wiskundige literatuur komt men er meer en meer toe niet $f(x)$ maar f als de functie te beschouwen en „Funktionen also als Abbildungen (Zuordnungsvorschriften) aufzufassen. Dabei ist es von untergeordneter Bedeutung, ob man die durch den Ausdruck x^2 gegebene Zuordnungsvorschrift als „x^2 von x" oder als $x \rightarrow x^2$ oder als die Menge der Paare (x, y) mit $y = x^2$ einführt".

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. Dr. O. BOTTEMA

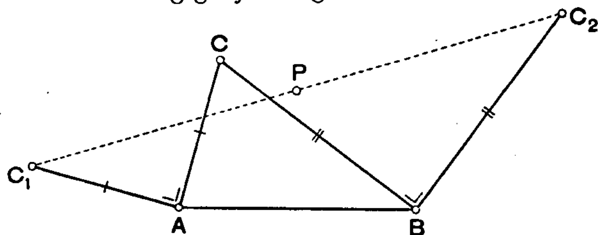
XXXVIII. *Het probleem van de verloren schat.*

Iemand wil een schat begraven op een plek, die ter wille van de geheimhouding op een gecompliceerde wijze wordt bepaald, maar door hem zelf gemakkelijk kan worden teruggevonden. Hij gaat daartoe uit van drie gemerkte bomen A, B, C, denkt zich AC over een rechte hoek om A (in positieve richting) gewenteld tot AC_1, BC om B (in tegengestelde richting) tot BC_2 en kiest het midden P van C_1C_2 als de bewuste plaats (fig. 1).

Later terugkomend kan hij de boom C niet terug vinden; in zijn wanhoop besluit hij verschillende punten als C aan te nemen en hij stelt zich voor vele vergeefse opgravingen te moeten verrichten. De eerste poging heeft echter reeds succes.

De eenvoudige stelling die uitspreekt dat P *onafhankelijk is van C* schijnt niet algemeen bekend te zijn. Zij werd mij medegedeeld door Ph. de Kanter (Delft), die zich haar van vroeger herinnert, maar geen bron kan vermelden. Als men de onmiskenbare verrassing der bewering heeft ondervonden kan het bewijs uiteraard niet moeilijk zijn.

Zijn $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ de elementen van driehoek ABC, dan is de afstand van C_1 tot AB gelijk aan $b \cos \alpha$, die van C_2 is $a \cos \beta$ en dus die van $P : \frac{1}{2}(b \cos \alpha + a \cos \beta) = \frac{1}{2}c$. Zijn C'_1, C'_2 en P' de projecties van C_1, C_2 en P op AB, dan is $AC'_1 = b \sin \alpha$, $BC'_2 = a \sin \beta$ waaruit krachtens de sinusregel volgt $AC'_1 = BC'_2$, zodat P' het midden van AB is. Als men C op AB of aan de andere kant van AB neemt krijgt men (bij de gekozen wentelingsrichtingen) hetzelfde resultaat. P blijkt dus de top te zijn van de òp AB links van AB beschreven rechthoekig-gelijkbenige driehoek.



XXXIX. *De straal van de omgeschreven sfeer van een simplex.*

De formule voor de straal van de omgeschreven cirkel van een driehoek $R = \frac{abc}{4O}$ schijnt op het eerste gezicht geen analogon te hebben in de stereometrie. De veronderstelling van een overeenkomstige uitdrukking voor de straal van de omgeschreven bol van een viervlak, waarbij in de noemer de inhoud, in de teller het product der ribben of dat der zijvlakken zou staan, moet uiteraard onmiddellijk worden verworpen, omdat de graad ondeugdelijk is. De vraag welk analogon met de planimetrische uitdrukking dan wél bestaat, wordt in zekere zin beantwoord door de formule van von Staudt $R = \frac{T}{6V}$, waarbij V de inhoud van het viervlak voorstelt en T de oppervlakte van een (hulp-)driehoek D die tot zijden heeft de producten van telkens twee overstaande ribben van het tetraeder. In sommige werken over elementaire geometrie vindt men de opmerking dat de genoemde formule reeds gegeven zou zijn door Crelle en inderdaad vindt men haar in diens *Sammlung mathematischer Aufsätze*, 1. Bnd. (Berlin, 1821) met een volledig bewijs (p. 112—117). Het geschrift van Crelle is een verzameling opstellen over verschillende onderwerpen, vooral uit de elementaire meetkunde, zoals inhoudsformules, de afstand van de middelpunten van om- en ingeschreven cirkel en het vraagstuk van Malfatti. In zijn voorwoord zegt de schrijver dat hij tot publicatie in boekvorm is overgegaan omdat in zijn land geen mathematisch tijdschrift bestaat. Het is de auteur zelf geweest, die spoedig daarna aan deze toestand een einde heeft gemaakt door de stichting in 1826 van het thans nog bestaande *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, dat door de medewerking van de meest eminente mathematici lange tijd het leidende wiskundige tijdschrift in Duitsland is geweest. Crelle merkt t.a.p. op dat formules waarbij R wordt uitgedrukt in de ribben van het viervlak, reeds vóór hem bekend waren, o.a. aan Legendre, maar hij claimt de prioriteit van de ontbinding van de radikant van de teller T in vier factoren van het type $a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23}$, waarbij a_{ij} de lengte van de ribbe A_iA_j van het viervlak $A_1A_2A_3A_4$ voorstelt. Crelle geeft verschillende methodes aan waarop hij R in de ribben zou kunnen uitdrukken, hij verwerpt een aantal omdat de berekeningen te lang worden en komt dan, uitgaande van de koordenvierhoek die tot hoekpunten heeft het middelpunt M van de omgeschreven bol en zijn projecties op twee zijvlakken en hun snijribbe, na vrij veel gereken, tot zijn

eindresultaat. De hulpdriehoek D heeft tot zijden $a_{12}a_{34}$, $a_{13}a_{42}$ en $a_{14}a_{23}$ en is dus gelijkvormig met (alle) *antiparallele* doorsneden van het viervlak. Is de formule van Crelle eenmaal gevonden, dan ligt het wel voor de hand haar uit dit gezichtspunt aan te tonen. Dat is dan inderdaad door Von Staudt gebeurd en wel in Crelle's tijdschrift (*57*, 1860, p. 88—89, *Über einige geometrische Sätze*), waarvan de stichter echter in 1855 was overleden en dat voortgezet was door Borchardt. Het nieuwe bewijs is vergeleken met de lange berekening van Crelle bijzonder eenvoudig en dat zal wel de reden zijn dat de formule zelve, ten onrechte, op de naam van Von Staudt staat. Deze laatste verwijst t.a.p. uitdrukkelijk naar de uitkomst van zijn voorganger.

Von Staudt legt nog niet een inversie aan zijn bewijs ten grondslag, een transformatie die in zijn tijd nog niet algemeen bezit was, maar zijn betoog komt daar wel op neer en is wezenlijk gelijk aan het thans gebruikelijke (b.v. Versluys, Handboek der Stereometrie (1911), p. 179; Couderc et Baliccioni, Premier Livre du Tétraèdre (1935), p. 117). Het verloopt als volgt. Beschouw de inversie met A_4 tot centrum en $m = a_{14}a_{24}a_{34}$ tot macht. De hoekpunten A_1, A_2 en A_3 gaan over in de punten A'_1, A'_2, A'_3 en de omgeschreven bol in het vlak door deze punten, dat dus tot A_4 de afstand $h = \frac{m}{2R}$ heeft. De zijden van $A'_1A'_2A'_3$ zijn $a_{14}a_{23}$, $a_{24}a_{31}$ en $a_{34}a_{12}$. Verder is $A_4A_1 : A_4A'_1 = \frac{m}{a_{14}^2}$ enz., zodat de inhoud van $A_4A'_1A'_2A'_3$ gelijk is aan mV. Deze inhoud is ook gelijk aan $\frac{1}{3}Th = \frac{1}{6}T\frac{m}{R}$, waaruit de formule onmiddellijk volgt.

Men kan moeilijk beweren dat de formule van Crelle-Von Staudt in de gegeven vorm een doorzichtige generalisatie is van die voor R uit de planimetrie en men zou waarlijk niet kunnen vermoeden hoe een formule voor de straal van de omgeschreven sfeer van een simplex in de n-dimensionale ruimte er uit zal zien. Laat ons nagaan hoe een afleiding met behulp van inversie b.v. in R_4 zou verlopen. Inverteert men het simplex $A_1A_2A_3A_4A_5$ met A_5 tot centrum en $m = a_{15}a_{25}a_{35}a_{45}$ tot macht, dan gaan de hoekpunten $A_1A_2A_3A_4$ over in die van het tetraeder $A'_1A'_2A'_3A'_4$ waarvan de ribbe a'_{kl} zoals gemakkelijk blijkt, gelijk is aan $\frac{a_{kl}}{a_{k5}a_{l5}}m$, terwijl de afstand van A_5 tot de ruimte waarin dit tetraeder D ligt, gelijk is

aan $h = \frac{m}{2R}$. Verder is $A_5A_k : A_5A'_k : = \frac{m}{a^2_{k5}}$, waaruit volgt dat de inhoud van $A'_1A'_2A'_3A'_4A_5$ gelijk is aan m^2V, als V de inhoud voorstelt van het gegeven simplex $A_1A_2A_3A_4A_5$. Is dus V' de inhoud van D dan heeft men $\frac{1}{4}V'h = m^2V$ waaruit volgt $R = \frac{V'}{8mV}$, maar het is duidelijk dat thans niet tot een zo symmetrische formule als in het driedimensionale geval kan worden geconcludeerd, omdat de ribben a_{k5} een andere rol in het antwoord spelen dan de overige zes ribben. Langs de geschetste weg kan men ook voor de straal van de omgeschreven sfeer van het simplex $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ in de n-dimensionale ruimte de formule $R = \frac{V'}{2nm^{n-3}V}$ afleiden; hierin is V de inhoud van het simplex, m is het produkt $a_{1,n+1}a_{2,n+1} \ldots a_{n,n+1}$ en V' is de inhoud van het (n-1)-dimensionale simplex met de ribben $a'_{kl} = \frac{ma_{kl}}{a_{k,n+1}\,a_{l,n+1}}$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$. Voor $n = 3$ heeft men een symmetrische uitkomst, wat blijkbaar zijn oorzaak vindt in de omstandigheid dat bij een tetraeder elke ribbe een welbepaalde kruisende „overstaande" ribbe heeft en samenhangt met het feit dat de bij verschillende hoekpunten behorende antiparallele doorsneden gelijkvormig zijn; of korter gezegd: vier is een mooi getal. Voor $n = 2$ wordt de uitkomst langs een andere weg eenvoudig: men heeft dan $V' = a_{12}$, $m^{n-3} = (a_{13}a_{23})^{-1}$, dus $\frac{V'}{m^{n-3}} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Langs de beschouwde weg schijnt het dus niet mogelijk tot een aantrekkelijke formule voor R te komen, die voor elke dimensie geldt. Het is welbekend dat op geheel andere wijze zo'n uitdrukking kan worden afgeleid, waarbij men bepaalde determinanten ontmoet, waarvan de elementen de kwadraten zijn van de ribben van het simplex. Meestal gaat men daarbij uit van een formule die het kwadraat van de inhoud van een simplex in de ribben uitdrukt; men specialiseert deze tot een relatie tussen de onderlinge afstanden van $n + 2$ punten in een n-dimensionale ruimte; voor deze punten neemt men daarna de hoekpunten van een simplex en het middelpunt van zijn omgeschreven sfeer (zie b.v. Rouché et de Comberousse, Traité de Géométrie, II (1931), p. 567—573).

Hieronder volgt een variant, die de bedoelde inhoudsformule niet benut. Zij gaat overigens, evenals het gebruikelijke bewijs voor deze formule, uit van de uitdrukking voor de inhoud van een simplex als functie van de rechthoekige coördinaten van zijn hoekpunten

$$V = \frac{1}{6}\left| x_i y_i z_i 1 \right|$$

$i = 1, 2, 3, 4$; wij nemen gemakshalve het voorbeeld $n = 3$; voor willekeurige n is de afleiding analoog. Als oorsprong van het coördinatenstelsel wordt nu het middelpunt M genomen; de richtingscosinussen van MA_i zijn $\cos \alpha_i$, $\cos \beta_i$, $\cos \gamma_i$.

Dan is dus

$6V = | R\cos\alpha_i, R\cos\beta_i, R\cos\gamma_i, 1 | = R^3 | \cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i, 1 |$

Blijkbaar is ook

$$6V = -R^3 | \cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i, -1 |.$$

Wij bepalen nu V^2 door vermenigvuldiging van de beide determinanten en doen dat door vermenigvuldiging van rijen. Voorts is $\cos^2\alpha_i + \cos^2\beta_i + \cos^2\gamma_i = 1$, $\cos\alpha_i \cos\alpha_j + \cos\beta_i \cos\beta_j + \cos\gamma_i \cos\gamma_j = \cos\varphi_{ij}$, waarbij $\varphi_{ij} = A_iMA_j$; $\cos\varphi_{ij} = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi_{ij}}{2} = 1 - \frac{a^2_{ij}}{2R^2}$. Uit dit alles volgt, als nog $d_{ij} = a^2_{ij}$:

$$36V^2 = -R^6 \begin{vmatrix} 0 & \frac{-a^2_{12}}{2R^2} & \frac{-a^2_{13}}{2R^2} & \frac{-a^2_{14}}{2R^2} \\ \frac{-a_{12}}{2R^2} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

of wel $R^2 = \frac{-D_4}{576V^2}$,

waarbij

$$D_4 = \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

Algemeen vindt men, zoals gemakkelijk blijkt, voor de *straal van de omgeschreven sfeer van het $n+1$-simplex in de n-dimensionale ruimte*

$$R^2 = \frac{(-1)^n D_{n+1}}{2^{n+1}(n!)^2 V^2}$$

waarbij D_{n+1} de met D_4 analoge determinant voorstelt.

Ontwikkelt men D_4, dan komt er

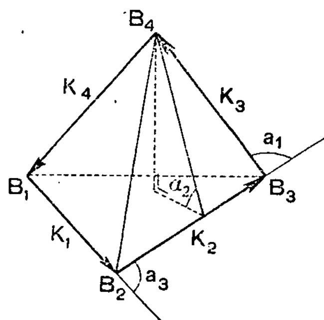
$D_4 = d^2_{12}d^2_{34} + d^2_{13}d^2_{42} + d^2_{14}d^2_{23} - 2d_{12}d_{34}d_{13}d_{42} - 2d_{13}d_{42}d_{14}d_{23} - 2d_{14}d_{23}d_{12}d_{34} = -(a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23})(-a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23})(a_{12}a_{34} - a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23})(a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} - a_{14}a_{23})$,

waardoor de formule van Von Staudt-Crelle wordt teruggevonden. Voor $n = 2$ komt men door $D_3 = 2d_{12}d_{23}d_{31}$ op de formule voor de straal van de omgeschreven cirkel terug.

XL. *Het evenwicht van vier krachten in de ruimte.*

Een noodzakelijke voorwaarde voor het evenwicht van drie niet onderling evenwijdige krachten in een plat vlak luidt: de werklijnen gaan door één punt. De voorwaarde is uiteraard niet voldoende. Zij moet daarvoor nog worden aangevuld met de conditie: elke kracht is evenredig met de sinus van de door de beide andere krachten ingesloten hoek. Het analogon in de ruimte van de eerste voorwaarde luidt: als vier niet evenwijdige krachten in evenwicht zijn, dan liggen hun werklijnen *hyperboloïdisch*. De tweede voorwaarde heeft een vergelijkbare redactie voor het driedimensionale geval als men gebruik maakt van het begrip *sinus van een drievlakshoek*.

Is $OA_1A_2A_3$ een drievlakshoek met de zijden a_1, a_2, a_3 en de hoeken α_1, α_2 en α_3 dan wordt onder sin φ_{123} verstaan het produkt $\sin a_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \sin a_3$. Daar volgens de sinusregel $\sin a_1 : \sin a_2 = \sin \alpha_1 : \sin \alpha_2$ heeft men $\sin \varphi_{123} = \sin \varphi_{213}$ enz.; de sinus is dus onafhankelijk van de gekozen volgorde der ribben van de drievlakshoek. Is $OA_i = p_i$ dan is de inhoud van het op de ribben OA_i te beschrijven parallelepipedum gelijk aan $p_1p_2p_3 \sin \varphi$. Stel nu dat vier krachten K_1, K_2, K_3 en K_4 in evenwicht zijn. Dan is de scheve vierzijde, die ontstaat door de vier vectoren achter elkaar te plaatsen, gesloten. Zijn B_i de beginpunten der vectoren (zie fig. 1), dan is de oppervlakte van driehoek $B_1B_2B_3$ gelijk aan $\frac{1}{2}K_1K_2 \sin(\pi - a_3)$ en de afstand van B_4 tot het overstaande vlak $K_3 \sin(\pi - a_1) \sin \alpha_2$; de inhoud van het viervlak $B_1B_2B_3B_4$ is dus $\frac{1}{6}K_1K_2K_3 \sin \varphi_{123}$. Zij is ook gelijk aan $\frac{1}{6}K_2K_3K_4 \sin \varphi_{234}$ enz. Hieruit volgt dat $K_1 : K_2 : K_3 : K_4 = \sin \varphi_{234} : \sin \varphi_{341} : \sin \varphi_{412} : \sin \varphi_{123}$ of wel: *elke kracht is evenredig met de sinus van de door de overige krachten bepaalde drievlakshoek.*



EXAMENS IN FRANKRIJK

Het „Bulletin de l'Association des Professeurs . . ." van september 1958 bevat een groot aantal examenopgaven. De aard van deze opgaven is geheel anders, dan die van de examens in ons land.

Om enig idee te geven, belangstellenden verwijs ik naar bovengenoemd bulletin, hieronder een meetk. opgave voor „Concours d'entrée dans les centres pédagogiques régionaux".

— Préambule.

Dans un plan (P), fixe dans tout le problème, on considère un triangle A B C; soient A', B', C' les pieds de ses hauteurs issues respectivement de A, B, C; H son orthocentre; D le point d'intersection de AA' et de B'C'; E le milieu de AH; O le centre du cercle (O) circonscrit au triangle ABC; [BC] le cercle de diamètre BC; [AH] le cercle de diamètre AH. On pose BC $= a$, AA' $= h$, nombres positifs, et $\frac{\text{HA}}{\text{HA}'} = \lambda$, nombre algébrique.

Démontrer que les cercles [BC] et [AH] sont orthogonaux.

Démontrer qu'il existe une inversion de centre A qui échange le cercle (O) et la droite B'C' d'une part, le cercle [AH] et la droite BC d'autre part. Pour quelles valeurs de λ la droite B'C' coupe-t-elle le cercle (O)?

Le cercle [BC] recoupe les cercles AHB et AHC en β et γ respectivement. Démontrer que Cγ et Bβ se coupent en D, Bγ et Cβ en E.

I. Dans toute cette première partie, on suppose fixes les points A, A' et H.

1°) Démontrer que les cercles [BC] engendrent un faisceau, dont on discutera la nature suivant les valeurs attribuées à λ.

2°) Lieu du point O. Lieu des points d'intersections de B'C' et du cercle (O). Enveloppe de B'C'.

3°) Lieu de β et de γ.

4°) I étant le milieu de B'C', la droite AI recoupe le cercle (O) en J. Lieux des points I et J.

5°) Construire le triangle ABC connaissant BC $= a$. Discuter suivant les valeurs attribuées à λ, h et a.

II. Dans toute cette deuxième partie, on suppose fixes les points B et C, et constant le nombre algébrique λ.

1°) Evaluer le rapport $\frac{\text{AA}'^2}{\text{A'B} \cdot \text{A'C}}$. En déduire le lieu de A.

Discuter la nature de ce lieu suivant les valeurs attribuées à λ.

2°) Construire le triangle ABC connaissant $AA' = h$. Discuter suivant les valeurs attribuées à λ, a et h.

3°) Existe-t-il un point S de l'espace tel que le tièdre SA, SB, SC soit trirectangle? Dans quelle région du plan (P) doit alors se trouver le point A et quelles sont les valeurs correspondantes de λ? λ ayant une des valeurs permises, quel est le lieu de S?

III. Dans toute cette troisième partie, on suppose que, les points B et C restant fixes, A décrit la droite Δ parallèle à BC, à la distance h de BC.

1°) Enveloppe du cercle [AH]; lieux des points E et H. Dans quel cas le lieu du point E et le cercle [BC] ont-ils des points communs? Montrer qu'ils sont alors tangents en ces points communs.

2°) Construire le triangle ABC connaissant $\frac{HA}{HA'} = \lambda$, Discuter suivant les valeurs attribuées à λ, a et h.

3°) Soient (Σ) la sphère de diamètre BC et (K) le cône de sommet A ayant pour base, dans le plan (Q) mené par BC perpendiculairement à (P), le grand cercle (Γ) de (Σ).

Démontrer que (Σ) et (K) ont en commun un deuxiemè cercle (Γ'), de diamètre B'C', dans un plan (Q') perpendiculaire à (P).

4°) Quand A décrit Δ, le cône (K) reste tangent à deux planes fixes (Π_1) et (Π_2).

Comment varient les génératrices de contact?

Démontrer que (Γ') reste tangent à deux cercles fixes (C_1) et (C_2) de (Σ). En déduire que la droite B'C' enveloppe une ellipse dont on précisera d'abord les sommets, puis les foyers F et F'.

5°) Lieux de F et F' quand h varie.

W. A. M. B.

BOEKBESPREKING

Dr. P. Bronkhorst en Dr. Ir. B. Groeneveld, *Stereometrie voor V.H. en M.O.*; J. B. Wolters, Groningen 1958. *f* 1,90.

Wanneer men dit boek van in totaal 58 bladzijden ontvangt, vraagt men zich met enige verbazing af of het wel alles zal bevatten wat voor het eindexamen-stereometrie op onze scholen voor V.H.M.O. gekend moet worden.

Inderdaad is dit het geval en de behandeling is beknopt en helder. Enige onderwerpen die langzamerhand tot de „theorie" zijn gaan behoren worden in vraagstukken behandeld, zo b.v. hoofdstuk VII over het zwaartepunt van een viervlak.

Het is, zoals reeds werd opgemerkt voor de leerlingen ongetwijfeld een helder werkje, waaruit ze ineens weten wat ze moeten kennen.

Wel vraag ik me af, of dit nu *het* doel van ons onderwijs is: leerlingen klaar maken voor het eindexamen. Vele docenten zullen toch ook nog wel eens iets anders willen behandelen. Ik denk b.v. aan een bespreking van het aantal mogelijke regelmatige lichamen met behulp van de stelling van Euler. Of aan de algemene inhoudsformule voor een prismoïde en dan te laten zien dat de inhoudsformules voor enige andere lichamen hier bijzondere gevallen van zijn. Maar genoeg. Het boekje is keurig en de omslag fleurig uitgevoerd.

Dr. H. Turkstra en S. J. Geursen, *Kern der Vlakke Meetkunde.* J. B. Wolters, Groningen 1958. Ing. *f* 3,40; geb. *f* 3,90. (Tweede druk).

Voor zover ik heb kunnen nagaan is bij het verschijnen van de eerste druk, hiervan geen bespreking in „Euclides" verschenen.

Het boekje laat zich het beste gebruiken naast de „Werkschriften Vlakke Meetkunde" I, II, en III, van dezelfde auteurs. Volgens het voorbericht kàn het echter even goed als „gewoon" leerboek zonder de werkschriften gebruikt worden. Het bevat van de vlakke meetkunde alles wat daarvan tegenwoordig in de eerste drie klassen der middelbare scholen wordt onderwezen. Een paar opmerkingen:

1. De auteurs schrijven steeds parallelogram terwijl de woordenlijst van de nederlandse taal aangeeft parallellogram.
2. Is het nodig de vlieger als een afzonderlijk type vierhoek te behandelen?
3. De definitie van raaklijn op bladz. 120 kan m.i. worden gemist. In het voorafgaande is duidelijk geworden wat men bedoelt. De definitie „an sich" verheldert niet verder en is uit zijn verband gerukt, onbegrijpelijk bij het „van buiten leren".
4. De gemeenschappelijke raaklijnen had ik liever behandeld gezien op de wijze zoals dit in de vraagstukken van III § 41 wordt gedaan en niet als in III, § 38.

Overigens een bruikbaar boek en netjes uitgevoerd.

J. F. Hufferman

Karl Menninger, *Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl.* 2. neubearbeitete und erweiterte Auflage. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen. 532 + iii blz. 294 afb. D.M. 40.

Het is reeds jaren lang een aanzienlijke leemte in de historisch-mathematische literatuur geweest, dat dit werk niet meer verkrijgbaar was. Toen het in 1934 voor de eerste maal verscheen, wekte het om zijn ongewoon rijke inhoud en zijn boeiende schrijfwijze dadelijk de bewondering van ieder die er kennis van nam. Wanneer het uitverkocht raakte, weet ik niet, maar na de oorlog bleek het in ieder geval niet meer

verkrijgbaar. Thans, ongeveer een kwart eeuw later (tussen de twee dateringen van de voorrede liggen precies 25 jaren) is het opnieuw verschenen en zelden zullen de woorden neubearbeitet und erweitert met meer recht op een titelblad geplaatst zijn. De omvang is gegroeid van x + 365 tot iii + 532 blz., waaruit is af te leiden, hoeveel nieuw materiaal is opgenomen. Bij vergelijking van wat behouden is gebleven met de eerste editie blijkt vrijwel alles opnieuw geschreven te zijn. Waar de zakelijke inhoud niet is uitgebreid en verbeterd (hetgeen op vrijwel iedere bladzijde het geval is) blijkt de uitdrukkingswijze aan een uiterst nauwkeurige revisie onderworpen te zijn geweest.

Het is, om kort te gaan, eigenlijk een geheel nieuw boek geworden. Wie de eerste uitgave bezit kan zich niet, zoals zovaak wèl mogelijk is, gelukkig prijzen met de gedachte, dat hij van het nieuwe wèrk toch althans een aanzienlijk deel bezit. Als hij van het onderwerp op de hoogte wil blijven, kan hij zijn eerste druk beter wegdoen.

De bewondering die men de auteur 25 jaar geleden reeds gaarne toedroeg, voelt men nu in nog hogere mate. Hij heeft dit kwart eeuw blijkbaar goed gebruikt: zijn speurwerk, dat op ontelbaar vele geisoleerde historische, linguistische, etnografische en folkloristische feiten gericht moest zijn, heeft hij kennelijk onvermoeibaar voortgezet. In 1934 had men het gevoel, dat er nu wel niets weetbaars op het gebied van het zeggen en schrijven van getallen zou zijn, dat niet in het boek stond en nu blijkt de inhoud toch nog overal ontzaglijk verrijkt te zijn.

Het is niet alleen deze volhardende speurzin die bewondering verdient, maar ook de gave, het onafzienbare materiaal op levendige en boeiende wijze uiteen te zetten, het overzichtelijk te ordenen en overal de grote principiële lijnen goed te doen uitkomen.

Het boek is, zoals de ondertitel nu, in tegenstelling tot de eerste editie, kort en bondig zegt, aan de cultuurgeschiedenis van het getal gewijd. Het valt, zoals de titel uitdrukt, in twee grote delen uiteen, die overigens niet overeenkomen met de twee delen, waarin het boek typografisch is ingedeeld (in één band, maar met zelfstandige pagineringen). Zahlwort duidt op de *teltaal*, het zeggen van getallen; Ziffer op het *cijferschrift*, het in tekens schrijven van getallen. Een van de belangrijke conclusies waartoe de behandeling voert, is dat in het algemeen het cijferschrift niet de directe schriftelijke weergave van de teltaal is.

In het tweede deel van het werk wordt tegenover het schrijven van getallen het rekenen met getallen gesteld. Ook over dit laatste onderwerp wordt een ware schat van verrassende inlichtingen gegeven.

Het boek is uiteraard voor wiskundigen van groot belang. Zij vormen echter lang niet de enige categorie, waaraan men de kennisneming met overtuiging zou willen aanraden. Het zou eigenlijk ter beschikking moeten staan van alle onderwijzers, die er een heel nieuwe kijk op de historische achtergronden van de stof die ze in hun rekenlessen behandelen, door zouden krijgen. Verder bezit het, wegens het nauwe verband met hun eigen vakken, grote waarde voor taalkundigen en cultureel-antropologen, terwijl ook psychologen zich er met voordeel in zullen kunnen verdiepen. En ten slotte is het natuurlijk onmisbaar voor cultuurhistorici, tot wie het zich in zijn ondertitel immers uitdrukkelijk richt. Het moeten dan echter cultuurhistorici zijn, die een voldoend ruime blik op het begrip cultuur bezitten om niet (dit schijnt nog voor te komen) alles wat met getallen te maken heeft bij voorbaat buiten de kring van hun belangstelling te sluiten.

Het boek is, zoals men ziet, duur, tè duur voor particulieren. Maar gelukkig bestaan er schoolbibliotheken, waarvoor het aangeschaft kan worden. Zelden zal een hiervoor beschikbaar bedrag beter besteed worden.

E. J. Dijksterhuis

Dr. Karl Peter Grotemeyer, *Analytische Geometrie*, Sammlung Göschen Band 65/65a, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1958, 202 blz., ing. DM 4,80.

Men vindt in dit deeltje alleen de analytische meetkunde van de driedimensionale ruimte. De behandeling hiervan is geschied op vector-theoretische grondslag. In een inleidend hoofdstuk over vectoralgebra wordt datgene, wat men later in het boek nodig heeft, uiteengezet. De analytische meetkunde wordt niet volkomen abstract opgezet: er wordt stereometrische kennis verondersteld op analoge wijze als in onze analytische meetkunde voor schoolgebruik kennis van de planimetrie verondersteld wordt.

Achtereenvolgens worden ter sprake gebracht rechten en vlakken, transformaties (o.a. een classificatie van de bewegingen), kwadratische oppervlakken. Daarna volgt een analoge behandeling van de projectieve meetkunde.

Het boekje is zeer duidelijk geschreven. Leraren, die, zoals de recensent, ouderwets opgevoed zijn, zullen met veel plezier van deze moderne behandelingswijze kennis nemen.

Dr. L. N. H. Bunt, *The teaching of Arithmetic and Mathematics to Students between 6 and 15 Years of Age in the Netherlands*, Acta Paedagogica Ultrajectina XIV, 77 blz., f 3,75, J.B. Wolters, Groningen, 1958.

Het boek behelst een rapport, dat door de Nederlandse Onderwijscommissie uitgebracht is op het Internationaal Mathematisch Congres te Edinburg. De samensteller is erin geslaagd op homogene wijze een rapport uit te brengen aangaande het onderwijs in rekenen en wiskunde op de lagere school, het v.g.l.o., het gymnasium en de h.b.s., de m.m.s., de handelsdagschool, de u.l.o., de l.t.s., de lagere landbouwschool en de huishoudschool. Men vindt er een volledig overzicht in over de aard en de doelstelling van de school, het programma, de onderwijsmethode, enz. In het artikel over gymnasium en h.b.s., dat van de hand van Dr. Bunt zelf is, worden ook de overlading en modernere opvattingen besproken. Jammer alleen is, dat hij deze laatste op ietwat te subjectieve wijze heeft weergegeven. In een slothoofdstuk behandelt Dr. Turkstra nog de aansluiting tussen lagere en middelbare school.

H. Freudenthal, *Logique mathématique appliquée*, Collection de logique mathématique, série A, XIV, 57 blz., 1200 F, Gautier Villars, Paris, en E. Nauwelaerts, Louvain, 1958.

Het werkje is een bekroond antwoord op een in 1952 door het „Institute for the Unity of Science" van de „American Academy of Arts and Sciences" te Boston uitgeschreven prijsvraag over het onderwerp, dat door de titel wordt aangegeven. Men vindt er een groot aantal toepassingen van de mathematische logica in behandeld. Ik wil me bij deze bespreking tot een tweetal beperken, die mij bijzonder getroffen hebben.

De schrijver zet uiteen, op welke wijze elektrische apparaten en meer in het bijzonder de organen van rekenmachines een werking hebben, waarvan de structuur overeenkomt met die van de operaties in de tweewaardige logistiek. De behandelingswijze is verrassend en zodanig, dat noch logistische noch fysische voorkennis vereist is om het betoog te kunnen volgen. Onder meer worden de elektrische schel, de flip flop, een optelmechanisme en het geheugen besproken. Als toegift volgt een originele analyse van de paradox van de leugenaar.

In een ander hoofdstuk vindt men een onderzoek van de moeilijkheden, die resulteren uit het toepassen van de formele implicatie op materiële problemen. De

schrijver gaat daarbij uit van de volgende paradox. De temperatuur van het water in deze bak is 20° – is gelijkwaardig met – als ik in deze bak een thermometer dompel, dan wijst deze 20° aan. Welnu, neem een bak water en dompel er geen thermometer in. Een implicatie „uit A volgt B" is waar, als A niet waar is. Gezien het feit, dat er geen thermometer in de bak gedompeld wordt, is dus de uitspraak „als ik in deze bak een thermometer dompel, dan wijst deze 20° aan" waar. En omdat deze uitspraak gelijkwaardig is met de uitspraak „de temperatuur van het water in deze bak is 20°", is dus ook waar, dat de temperatuur van dit water 20° is. En dat alleen uit hoofde van het feit, dat er geen thermometer ingedompeld wordt! De oplossing van deze paradox, waarmee de schrijver de gevaren van een kritiekloos toepassen van formalismen heeft willen aantonen, wel, die vindt U in het boek.

Prof. Dr. J. J. Poortman, *Repertorium der Nederlandse Wijsbegeerte, Supplement I*, 168 blz., f 12,90, Wereldbibliotheek N.V., Amsterdam–Antwerpen, 1958.

Dit supplement op het in 1948 verschenen Repertorium geeft een volledig overzicht over de publikaties van de Nederlandse auteurs op het gebied van de filosofie van 1948 tot 1958. Men vindt er dus ook de titels in van de publikaties op mathematisch-wijsgerig terrein. Daar deze slechts een klein deel van het gehele werk beslaan, moet ik in dit tijdschrift volstaan met deze korte vermelding. Ik wil echter toch niet nalaten Prof. Poortman hartelijk te danken voor het vele werk, dat hij ten behoeve van dit zeer nuttige repertorium verricht heeft.

P. G. J. Vredenduin

G. Doetsch, *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, Birkhäuser Verlag-Basel, Mathematische Reihe, Band 24 (1958), 304 S. Zw fr. 39.40.

Zoals bekend mag worden verondersteld heeft deze schrijver zijn in 1937 verschenen werk over de Laplace-transformatie laten uitdijen tot een „Handbuch" in drie delen die als band 14, 15 en 19 in dezelfde serie onlangs zijn verschenen. Het hier besproken werk is op zijn beurt een soort inkrimping van het „Handbuch" en als zodanig lijkt het in omvang en aard weer op de oorspronkelijke versie van 1937. Wie nu mocht menen dat het laatstgenoemde werk hiermee wel definitief als afgedaan kan worden beschouwd komt bedrogen uit, want op pag. 57 van de „Einführung" treffen we een verwijzing naar de versie van 1937 aan.

Terwijl het „Handbuch" meer een naslagwerk is, is de „Einführung" bedoeld als leerboek dat men desgewenst geheel kan doorwerken. Men vindt er datgene in, wat men normaliter in de praktijk van de Laplace-transformatie weten moet, een soort „basic Laplace" dus, hoewel we wel veronderstellen dat Engels georiënteerde schrijvers hier een geheel andere voorstelling van hebben. Men vergelijke bijvoorbeeld eens dit werk met het charmante boek van Van der Pol & Bremmer.

De mathematische behandeling van de Einführung is over het algemeen genomen grondig en de indeling van de stof is didactisch verantwoord. Men zou wel met de schrijver van smaak kunnen verschillen over de volgorde van de verschillende onderwerpen. Het doet even vreemd aan om pas halverwege in het boek, nadat al verschillende toepassingen op differentiaal- en differentievergelijkingen behandeld zijn, de complexe omkeerformule aan te treffen. Een opmerking van ernstiger aard is evenwel, dat bij de nogal populaire behandeling van de deltafunctie van Dirac gezwegen is over het bestaan van distributies, en dat de naam van L. Schwartz niet eens genoemd is.

Uiteraard mogen wij aan een „inleiding" niet te hoge eisen stellen. Het boek is prettig leesbaar. Voor de meer zuiver wiskundig ingestelde lezer is het een, nogal

uitvoerige, voorbereiding voor verder gaande theorieën, voor de meer toegepast wiskundige lezer geeft het een stevige ondergrond. Hij zal echter een tabel van Laplace getransformeerden in dit boek smartelijk moeten missen. Het enige is een lijst van 8 (!) voorbeelden op pag 19.

Al met al een boek dat met enige reserve aanbevolen kan worden. De uitvoering van het boek is, zoals we dat van deze uitgever gewend zijn, voortreffelijk.

H. A. Lauwerier

Dr. W. J. Bos en Drs. P. E. Lepoeter, *Wegwijzer in de Algebra*, deel I, (uit de serie Wiskunde voor V.H.M.O.), IX + 170 bldz., gebonden f 5,50, uitg. J. M. Meulenhoff, Amsterdam, 1958.

Een Toelichting is voor docenten gratis verkrijgbaar. Hierin worden enkele didactische beschouwingen gegeven over het leren van algoritmen, de betekenis van letters en het motiveren, voor leerlingen, van het leren van algebra.

De schrijvers wensen een strenge beoordeling van eenvoudige gemengde vraagstukken. „Wij zijn dan ook van mening dat een oordeel over de vorderingen van leerlingen in de eerste plaats dient te geschieden op grond van proefwerken over de totale behandelde stof. Bij de beoordeling van dergelijk werk is het nodig te breken met de traditie dat het percentage goede antwoorden het cijfer vastlegt. Enkele principiële fouten kunnen dergelijk werk reeds onvoldoende maken''. Met deze gezonde opvatting over de eisen, die aan leerlingen gesteld moeten worden, is in het boek voortdurend rekening gehouden.

De betekenisveranderingen van de letters achten de schrijvers een van de belangrijkste problemen voor de didactiek van de algebra. De „vakjesschrijfwijze'' wordt gebruikt voor het bijbrengen van een goed begrip van het plaatsvervangend karakter van de letters. Het steeds weer de aandacht vestigen op deze veelomvattende kwestie en het pogen om in een bijzonder geval een oplossing te geven is zeer lofwaardig, maar ook enigszins riskant in een leerboek met deze bestemming, gezien de huidige toestanden bij ons onderwijs.

Bij de motivering, voor leerlingen, om algebra te leren, spelen de persoonlijke opvattingen van de leraar een belangrijke rol. De schrijvers hebben hun, in de Toelichting genoemde voorkeur, op een zodanige wijze in hun boek verwerkt, dat het lezen ervan bij veel leerlingen kan bijdragen tot het ontwikkelen van de juiste smaak voor de algebra.

Het boek bestaat uit 64 taken, verdeeld over 160 bladzijden en uit aanvullende herhalingen en vraagstukken over hoofdrekenen, omvattend 10 bladzijden. Vanzelfsprekend worden enige begrippen niet gedefinieerd maar door voorbeelden toegelicht. Hun aantal is klein. Een hoofdstuk over grafische voorstellingen is opgenomen, het beslaat 18 bladzijden. Een hoofdstuk over gebroken vormen ontbreekt, het komt in deel II. Voor de behandeling van de evenredigheden verwijzen de schrijvers naar hun meetkundeboek.

De indeling in taken is geen bezwaar voor gebruik van het boek in scholen met volledig klassikaal onderwijs. De schrijvers zijn erin geslaagd een dominerende persoonlijke toon te vermijden. Voor een leraar aan een school met volledig klassikaal onderwijs, die zich niet op het standpunt stelt, dat een leerboek een vademecum moet zijn, blijven er nog, bij gebruik van dit boek, voldoende mogelijkheden om les te geven in eigen stijl.

Het boek is overdekt met een net van waarschuwingsseinen, aangebracht op de juiste plaatsen, waaruit de grote ervaring van de schrijvers blijkt.

Op bldz. 158 bij „het minteken vóór de breuk" wordt verwezen naar vroeger. Een nadere aanduiding is hier wel gewenst.

De termen omstructuring, motivatie, evenwaardig en pompmachine vormen wellicht een tractatie voor onze nomenclatuurcommissies.

Door goede keuze van lettertypen en evenwichtige vlakverdeling leest het boek prettig. De uitvoering is zeer fraai.

H. G. Brinkman

RECREATIE

De redactie is voornemens in deze rubriek puzzels, problemen en dergelijke op wiskundig of aanverwant gebied op te nemen. De oplossingen zullen steeds in het volgende nummer geplaatst worden. Inzendingen (met oplossing) voor deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin. De inzendingen behoeven niet origineel te zijn en zullen dit in het algemeen ook wel niet zijn. Ze kunnen met of zonder vermelding van de naam van de inzender geplaatst worden.

1. Op de laatste W.V.O-conferentie vergastte Prof. Freudenthal de aanwezigen op de volgende opgave: Verdeel een willekeurige stomphoekige driehoek in een minimaal aantal scherphoekige driehoeken.

Als toegift kan men nog proberen een scherphoekige driehoek in een minimaal aantal (groter dan 1) scherphoekige driehoeken te verdelen.

2. Zet de volgende reeks op niet triviale wijze voort:

$$3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 14,\ 18,\ 24,\ 30,\ 32,\ \ldots$$

Onder een triviale oplossing wordt verstaan een rekenkundige reeks van hogere orde, waarvan de gegeven getallen een beginsegment vormen.

3. Iemand is onderweg naar het dorp A. Hij komt aan een wegsplitsing en weet, dat een van de beide wegen naar A gaat en de andere niet. Bij de wegsplitsing staat een huis, waarin twee broers wonen. Het is hem bekend, dat de ene broer altijd waarheid spreekt en dat de andere altijd onwaarheid spreekt. Een van de beide broers komt naar buiten. Hij weet niet, welke van de twee broers dit is. Hij stelt hem één vraag. Deze is zodanig, dat ongeacht welke broer hij voor zich heeft, hij uit het antwoord kan opmaken, welke van de beide wegen naar A gaat. Welke vraag heeft hij gesteld?

DE „250 OPGAVEN"

Van de „250 opgaven" verschijnt zeer binnenkort de derde druk. De samenstellers verzoeken daarom aan ieder, die drukfouten in deze uitgave heeft ontdekt of die op- of aanmerkingen heeft, deze zo spoedig mogelijk ter kennis te brengen van dr. Joh. H. Wansink te Arnhem, Julianalaan 84.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek voor het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden bij de redactie, Kraneweg 71 te Groningen.

WISKUNDE IN HET BEDRIJFSLEVEN

De Commissie Bedrijfsleven-Onderwijs belegt op vrijdag 10 april 1959 van 16.00 tot 21.30 uur een bijeenkomst in het Carltonhotel, Vijzelstraat 2-18 te Amsterdam over „Enige toepassingen van de wiskunde in administratieve sectoren van het bedrijfsleven".

Sprekers o.m. H. C. Hoekstra, prof. dr. J. P. van Rooijen en dr. M. Euwe. Aanmelding en inlichtingen bij de secretaris W. A. Koster, p/a Werkspoor N.V., Oostenburgermiddenstraat 62 te Amsterdam.

NEDERLANDSE ONDERWIJSCOMMISSIE VOOR WISKUNDE

Een der onderwerpen, door onze Commissie in de periode tot 1962 te behandelen, luidt:

Etude comparée des méthodes d'enseignement employées pour le passage d'arithmétique à l'algèbre (sujet analogue au troisième thème d'enquête, sur l'initiation à la géométrie, étudié au Congrès d'Edimbourg).

Ik hoop met medewerking van belangstellenden de bewerking van dit onderwerp te kunnen organiseren. Evenals indertijd bij het onderwerp „aanvankelijk meetkunde-onderwijs" doe ik op allen, die hun medewerking willen verlenen, een beroep om hun bereidwilligheid aan mij kenbaar te maken.

Prof. Dr. H. FREUDENTHAL
Mathematisch Instituut
der Rijksuniversiteit
Achter de Dom 7
Utrecht

L.I.W.E.N.A.G.E.L.

Ledenvergadering, samen met de Natuurkunde-sectie van VELINES, op maandag 6 april 1959 in de Rijks h.b.s. te Amersfoort om 14.00 uur.

Enig agendapunt:
Bespreking van het „Rapport-commissie-leerlingenproeven".

De secretaris,
D. LEUJES.